Équation de Sylvester | Leçons : 155, 156, 162, 221

[Analyse, Gourdon]

__Lemme :__ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \lambda \in Sp(A)$, $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$

Alors pour toute norme d'algèbre $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists \alpha > 0$ et $K > 0$

tq $\forall t \geq 0$, $\|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}$

Preuve :

Décomposition de Dunford : $A = D + N$, D diagonalisable et N nilpotente, $DN = ND$

Donc en notant $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ on a $D = P\Delta P^{-1}$

~~Soit~~ ~~Les~~ λ_i ~~sont~~ les valeurs propres de A

N et D sont co-trigonalisables car commutent donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$N = P \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

D'où $A = D + N = P\left(\Delta + \begin{bmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix}\right) P^{-1} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$

D'où $e^{t\Delta} = \mathrm{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$ et $\|e^{t\Delta}\|_\infty = \sup_i |e^{t\lambda_i}| = e^{-ct}$

où $c = -\sup_i \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$

Par équivalence des normes en dimension finie on a

$$\exists k_1 > 0, \ \|e^{t\Delta}\| \leq k_1 e^{-ct}$$

De plus comme $e^{tD} = P e^{t\Delta} P^{-1}$ on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \|e^{tD}\| \leq \|P^{-1}\| \, \|e^{t\Delta}\| \, \|P\| \leq \underbrace{(\|P^{-1}\| \cdot k_1 \cdot \|P\|)}_{k_2} e^{-ct}$$

- Comme N est nilpotente on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tN} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} N^k$ où m est l'indice de nilpotence

D'où $\|e^{tN}\| \underset{t \to +\infty}{=} o(t^m)$

- Comme $t^m \underset{t \to +\infty}{=} o(e^{ct/2})$ et $\|e^{tA}\| \leq \|e^{tD}\| \cdot \|e^{tN}\|$

$$e^{tA} = o(t^n e^{-ct}) = o(e^{-\alpha t}) \quad \text{où } \alpha = \frac{c}{2} > 0$$

□

Théorème : Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $\forall \lambda \in Sp A \cup Sp B$, $Re \lambda < 0$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
Il existe une unique solution $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à l'équation $AX + XB = C$

Preuve :

- Soit le problème de Cauchy
$$(E) : \begin{cases} Y' = AY + YB \\ Y(0) = C \end{cases}$$
(E) est une équation différentielle linéaire à coefficients constants et on remarque que $Y : t \mapsto e^{tA} C e^{tB}$ convient.

- Existence : D'après le point précédent on a en intégrant (E) entre 0 et t
$$(*) \quad Y(t) - C = A\left(\int_0^t Y(s)\,ds\right) + \left(\int_0^t Y(s)\,ds\right)B$$
D'après le lemme $\exists M > 0, \exists \alpha > 0$, $\|e^{tA}\|, \|e^{tB}\| \leq M e^{-\alpha t}$
donc $\forall t \geq 0$ $\|Y(t)\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|C\| \cdot \|e^{tB}\| \leq M^2 \|C\| e^{-2\alpha t}$
D'où $\int_0^\infty Y(s)\,ds$ converge absolument et $Y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$
Par passage à la limite dans (*) :
$$C = AX + XB \quad \text{où } X = -\int_0^\infty e^{tA} C e^{tB}\,dt$$

- Unicité : Soit l'endomorphisme
$$\phi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X \mapsto AX + XB \end{cases}$$
est surjectif d'après le point précédent donc injectif par égalité des dimensions donc est bijectif, d'où l'unicité.

$\square$

Analyse, Gourdon (p390)

COMPLEMENT

- Décomposition de Dunford, si A est trigonalisable dans $\begin{cases} A = D+N \\ D \text{ diagonalisable} \\ N \text{ nilpotente} \\ DN = ND \end{cases}$

En effet on a $N_k = \ker(u-\lambda_k id)^{m_k}$ est stable par u (car $(u-\lambda_k id)^{m_k}$ et u commutent)

et $v_k = u_{|N_k} - \lambda_k id_{|N_k}$ est nilpotent et en notant $d_k = \lambda_k id_{|N_k}$

on a $u_{|N_k} = v_k + d_k$ avec d_k diagonalisable et v_k nilpotent et $v_k d_k = d_k v_k$.

on définit $\begin{cases} d = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \pi_k & (\pi_k \text{ projecteur de } E \text{ sur } N_k) \\ v = u - d \end{cases}$

car on a $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$ par lemme des noyaux.

On a donc $u = v + d$, v nilpotent ($v = v_k$ sur N_k)

, d diagonalisable ($d = d_k$ sur N_k)

, $dv = vd$